ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

Να βρεθεί η γενική λύση των διαφορικών εξισώσεων:

1. $2x^2y''+3xy'-y=0$, $x>0$.

2. $x^2y''+5xy'+4y=0$, $x>0$.

3. $x^3y^{(3)}-x^2y''-2xy'-4y=0$, $x>0$.

<u>ΛΥΣΕΙΣ</u>

1. Θέτοντας

$$x=e^t,$$

και

$$u(t):=y(e^t),$$

η δοθείσα διαφορική εξίσωση Euler μετασχηματίζεται στην

$$2(D-1)Du+3Du-u=0, \quad (1)$$

όπου $D:=\dfrac{d}{dt}$. Η χαρακτηριστική εξίσωση της (1) είναι

$$2\lambda(\lambda-1)+3\lambda-1=0,$$

με ρίζες $\rho_1=\frac{1}{2}$, $\rho_2=-1$ και άρα η γενική της λύση δίνεται από τον τύπο

$$u(t)=C_1e^{\frac{1}{2}t}+C_2e^{-t},$$

οπότε

$$y(x)=C_1x^{\frac{1}{2}}+C_2x^{-1},$$

με C_1, C_2 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

2. Θέτοντας

$$x = e^t,$$

και

$$u(t) := y(e^t),$$

η δοθείσα διαφορική εξίσωση Euler μετασχηματίζεται στην

$$(D-1)Du + 5Du + 4u = 0, \quad (1)$$

όπου $D := \dfrac{d}{dt}$. Η χαρακτηριστική εξίσωση της (1) είναι

$$\lambda(\lambda - 1) + 5\lambda + 4 = 0,$$

με τις ρίζες $\rho_1 = \rho_2 = -2$ και άρα η γενική της λύση δίνεται από τον τύπο

$$u(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-2t},$$

οπότε

$$y(x) = (C_1 + C_2 \ln x)x^{-2},$$

με C_1, C_2 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

3. Θέτοντας

$$x = e^t,$$

και

$$u(t) := y(e^t),$$

η δοθείσα διαφορική εξίσωση Euler μετασχηματίζεται στην

$$(D-2)(D-1)Du-(D-1)Du-2Du-4u=0, \quad (1)$$

όπου $D:=\frac{d}{dt}$. Η χαρακτηριστική εξίσωση της (1) είναι

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)-\lambda(\lambda-1)-2\lambda-4=0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$(\lambda^2+1)(\lambda-4)=0,$$

με τις ρίζες $\rho_1=4$, $\rho_2=i$, $\rho_3=-i$ και άρα η γενική λύση της (1) δίνεται από τον τύπο

$$u(t)=C_1e^{4t}+C_2\cos t+C_3\sin t,$$

οπότε

$$y(x)=C_1x^4+C_2\cos(\ln x)+C_3\sin(\ln x),$$

με C_1, C_2, C_3 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.